第63卷　第4期　　中山大学学报（自然科学版中英文）　　Vol. 63　No. 4
2024年　7月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Jul.　2024

DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2022A062

Heston模型下的两人鲁棒非零和随机微分投资组合博弈*

朱怀念[1]，陈卓扬[1]，宾宁[2]

1. 广东工业大学经济学院，广东 广州 510520
2. 广东工业大学管理学院，广东 广州 510520

摘　要：用Heston模型描述风险资产的价格动态，构建了包含一种无风险资产和一种风险资产的金融市场，投资者可以将其财富自由地配置于无风险资产和风险资产中. 考虑到投资者之间经济行为的随机博弈，用相对业绩刻画投资者之间的博弈行为，同时考虑模型的不确定性，以最大化最坏情境下投资者相对业绩的期望效用为目标，构建了包含两个投资者的鲁棒非零和随机微分投资组合博弈模型，利用动态规划方法分别求得了CRRA效用下Nash均衡策略的解析表达，借助数值仿真算例进行了参数的敏感性分析并给出了相应的经济意义阐释. 研究发现：相较于不涉及市场竞争的传统投资策略，竞争将使投资者产生羊群效应，跟风投资风险资产，致使金融市场的系统性风险上升. 此外，与不考虑模型不确定性相比，模型的不确定性使得投资者减少对风险资产的投资.

关键词：投资组合博弈；纳什均衡；CRRA效用；相对业绩；模型不确定性

中图分类号：F830.59　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**2097－0137（2024）04－0158－12

Robust non-zero-sum stochastic differential portfolio games with two interacting agents under the Heston model

ZHU Huainian[1], *CHEN Zhuoyang*[1], *BIN Ning*[2]

1. School of Economics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China
2. School of Management, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China

Abstract: The stochastic differential portfolio game between two competing investors with undertaking of the relative performance concerns is studied. Assume that the financial market is composed of a risk-free asset and a risky asset whose price process is described by the classical Heston model. Under the framework of Nash equilibrium theory, a non-zero-sum stochastic differential portfolio game model is constructed which maximizes the expected utility of the terminal relative performance. Utilizing the dynamic programming principle, explicit expressions of the value functions and Nash equilibrium for portfolio decisions are obtained under the representative case the CRRA utility. Finally, some numerical examples are performed to illustrate the influence of model parameters

* **收稿日期：**2022－08－30　　**录用日期：**2023－11－30　　**网络首发日期：**2024－06－04
基金项目：国家社会科学基金（21FJYB025）；广东省基础与应用基础研究基金（2023A1515012335）；广东工业大学2024年度校级大学生创业训练计划项目（xj2024118451031）
作者简介：朱怀念（1985年生），男；**研究方向：**动态博弈理论及应用、保险精算；E-mail：zhuhuainian@gdut.edu.cn
通信作者：宾宁（1980年生），女；**研究方向：**动态博弈理论及应用、保险精算；E-mail：bbb8087@gdut.edu.cn

on the Nash equilibrium together with some economic interpretations. Results show that, the best response of each investor to the competition is to mimic the strategy of its opponent. Consequently, the portfolio decision of an investor with the relative performance concern is more risky than that without the relative performance concern, and thus increases the systemic risk in financial markets. Moreover, model uncertainty will cause an risk-averse investor to adopt more conservative investment strategies than an ambiguity-neutral investor, which is reflected in the reduction of the amount invested in the risky asset.

Key words: portfolio game; Nash equilibrium; CRRA utility; relative performance; model uncertainty

在市场经济中，资产管理人的薪酬通常与其所管理的资金业绩相关.例如，私募基金经理通常会收取基金账户资金超出某一事先设定标准部分的20%，该部分常被称为绩效费，其设立的目的是为了激励资产管理人努力工作以提高其管理的账户资金，从而为投资人提供更高的投资回报.然而，资产管理人为了获得更多绩效费，往往会提升他的风险承担，增加对风险资产的投资.因此，在资产管理人的薪酬管理中，如何评价其业绩水平成为了一个值得探讨的热点课题.对此，费为银等(2015)及Carpenter(2000)提出可使用绝对业绩法来评价资产管理人的业绩水平，这一做法被金融实业界普遍采用.除此之外，也有学者提出使用相对业绩法来评价资产管理人的业绩水平(DeMarzo et al., 2008; Basak et al., 2014; Espinosa et al., 2015).顾名思义，所谓绝对业绩是用资产管理人所管理账户的财富规模来度量其业绩水平，而相对业绩则是使用资产管理人所管理账户的财富规模与同行竞争者财富差距的加权平均度量其业绩水平.数学上习惯将相对业绩刻画成下述两种形式：

$$(1-\theta)X_1+\theta(X_1-X_2) \tag{1}$$

或

$$X_1^{1-\theta}\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{\theta}, \tag{2}$$

其中X_1表示资产管理人所管理账户的财富规模，X_2表示资产管理人的同行竞争者所管理账户的财富规模，参数$\theta\in[0,1]$为权重系数，刻画了资产管理人对同行竞争者管理账户的财富的关注度.

自相对业绩的概念被提出以来，许多学者开始研究与相对业绩关联的最优投资决策问题.Espinosa et al.(2015)在连续时间框架下研究了相对业绩关注下的投资决策问题，利用随机微分博弈理论解决了多个相互作用的投资者之间的最优投资决策问题，证明了指数效用函数下Nash均衡解的存在性，为策略互动情形下的投资决策研究建立了系统的理论框架.基于Espinosa et al.(2015)的研究思路，Bensoussan et al.(2014)考虑了两家保险公司之间的策略互动，建立了非零和随机微分投资与再保险博弈模型，运用动态规划方法求得了Nash均衡策略的解析表达.之后，许多学者在Bensoussan et al.(2014)的基础上，对非零和投资与再保险博弈问题展开了研究，取得了大量研究成果，相关文献可参见Siu et al.(2017), Yan et al.(2017), Chen et al.(2018), Deng et al.(2018), Wang et al.(2019), 周忠宝等(2019a, 2019b), 宾宁等(2021), Luo et al.(2021), 莫仕茵等(2023)及其所引文献.

观察上述研究不难发现，他们对相对业绩的刻画都是采用式(1)所示的形式，且为了得到Nash均衡策略的解析表达，投资者的风险偏好都使用指数效用函数(CARA utility)刻画.如前所述，除了采用式(1)的形式刻画相对业绩外，还可以采用式(2)的形式刻画.与采用式(1)的形式相比，采用式(2)刻画相对业绩需辅以幂效用函数(CRRA utility)刻画投资者的风险偏好才能得到Nash均衡策略的解析表达.基此，Basak et al.(2014), Guan et al.(2016)采用式(2)的形式刻画相对业绩，建立了连续时间框架下的两人非零和随机微分投资博弈模型，运用动态规划原理求得了博弈的Nash均衡策略.最近，Kraft et al.(2020)在非完备市场模型下构建了包含两个投资者的非零和随机微分投资博弈，运用动态规划方法求得了CRRA效用函数下博弈Nash均衡策略的解析表达.Lacker et al.(2019)则构建了包含n个投资者的非零和投资博弈模型，给出了n取有限值和n趋于∞两种情形下博弈的Nash均衡策略.考虑到“消费—幸福”关系研究中的“和左邻右舍攀比”(keeping up with the Joneses)现象，Lacker et al.(2020)、dos Reis et al.(2022)、Fu et al.(2023)在投资

博弈问题的基础上增加考虑消费行为，研究了包含n个策略互动投资者之间非零和投资与消费博弈问题.

受上述研究的启发，本文在Heston模型下研究两个投资者策略互动情形下的最优投资决策问题.文中使用的数学模型在Kraft et al.(2020)的基础上，增加了鲁棒控制中的模型不确定性考量，构建了两个投资者之间的鲁棒非零和投资组合博弈模型，运用动态规划方法求得了CRRA效用下Nash策略的解析表达.与本文研究最为相近的工作包括Lacker et al.(2019)及Kraft et al.(2020)的研究，但与之对比，Kraft et al.(2020)仅研究了CRRA效用函数下两人非零和投资博弈问题，未考虑模型的不确定性；Lacker et al.(2019)则假设风险资产的价格波动率固定不变，以经典的几何布朗运动模型描述风险资产价格动态，研究了多个投资者之间的竞争性资产配置问题.但大量的实证研究表明风险资产价格的波动率并非一个常数，而是随时间变化的，采用随机波动率模型来描述风险资产的价格动态更符合实际.此外，由于数据统计和采集过程造成的数据丢失、数据偏差过大等原因导致的模型不确定在不断扩大，基于此，特提出了本文的研究问题.

本文的主要贡献在于：①在考虑模型不确定性的前提下，构建了Heston模型下的两人鲁棒非零和投资博弈模型，运用动态规划方法求得了博弈的Nash均衡策略，并在CRRA效用函数下给出了均衡投资策略的解析表达；②借助数值仿真算例对最优投资策略进行了参数的敏感性分析，并给出了相应的经济意义阐释.

1 模型设定

设$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$是一个完备概率空间，$\mathbb{P}$为一个参考概率测度，域流$\mathbb{F}\triangleq\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$满足通常条件，即$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$右连续且$\mathbb{P}$−完备，$\mathcal{F}_t$表示截止到$t$时刻所有可利用的信息.假定所有的随机过程和随机变量均定义在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$上.另外，假设金融市场中所有交易可连续进行且允许买空卖空，不考虑交易费用和税收.

1.1 经济环境

为研究简便而又不失一般性，假定市场上存在两种资产可供投资管理者选择：一种为无风险资产，如银行存款账户；另一种为风险资产，如股票.无风险资产在t时刻的价格B_t满足下述常微分方程

$$\mathrm{d}B_t = rB_t\mathrm{d}t,\quad B_0 = 1,$$

其中$r>0$为无风险利率.风险资产在t时刻的价格S_t服从Heston模型，具体形式如下

$$\begin{cases}\mathrm{d}S_t = S_t\Big[\big(r+\mu L_t\big)\mathrm{d}t + \sqrt{L_t}\,\mathrm{d}W_{1,t}\Big], & S_0 = s_0 > 0,\\ \mathrm{d}L_t = \kappa\big(\delta - L_t\big)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{L_t}\,\mathrm{d}W_{2,t}, & L_0 = l_0 > 0,\end{cases}$$

其中$W_{1,t}$和$W_{2,t}$是两个标准Brownian运动，满足$\mathrm{Cov}\big(\mathrm{d}W_{1,t},\mathrm{d}W_{2,t}\big)=\rho\mathrm{d}t,\rho\in[-1,1]$表示相关系数.$L_t$为风险资产收益的方差，$\kappa>0$为$L_t$的平均回复速率，$\delta>0$为方差过程$L_t$的长期均值，$\sigma>0$为$L_t$的波动率.为保证方差过程$L_t\geqslant 0$，假设参数满足$2\kappa\delta\geqslant\sigma^2$.

在市场经济中多个投资者共存，对这些投资者来说，他们每个决策的制定都不是孤立的，而是在与对手不断磨合、平衡中实现的，即存在经济行为的随机博弈(朱怀念等,2021).为分析简便，考虑市场中存在两个相互影响的投资者，分别记为投资者1和2.假设投资者$i\in\{1,2\}$在t时刻投资于风险资产的比例为$\pi_{i,t}$，余下的比例$1-\pi_{i,t}$全部投资于无风险资产，用$\{\pi_{i,t}\}_{t\geqslant 0}$表示投资者$i$的投资策略，该策略满足自融资条件.于是，在策略$\{\pi_{i,t}\}_{t\geqslant 0}$下投资者$i$对应的财富过程$X_{i,t}=\{X_{i,t}^{\pi_i}\}_{t\geqslant 0}$可用下述随机微分方程表示

$$\mathrm{d}X_{i,t} = X_{i,t}\Big[\big(r+\mu L_t\pi_{i,t}\big)\mathrm{d}t + \sqrt{L_t}\,\pi_{i,t}\mathrm{d}W_{1,t}\Big],\qquad X_{i,0} = x_{i,0},$$

其中$x_{i,0}$表示投资者i的初始财富水平.

1.2 模型不确定性

已有的关于投资者之间的非零和投资博弈的研究，都是在投资者是暧昧中性(ambiguity-neutral)的假定上进行的，且能够准确估计出风险资产的收益率.但在真实的金融市场中，由于数据缺失或数据污染等可能导致参数估计存在误差，以及市场的异常波动等模型不确定.因此我们接下来将研究面临模型不确定

性时暧昧厌恶(ambiguity-averse)的投资者的鲁棒最优投资决策问题，为表述简便，下文用AAI(ambiguity-averse investor)描述暧昧厌恶的投资者.

假定AAI用一个理想模型(也称之为参考模型)去刻画风险资产过程，由于模型不确定性（如数据采集不够，参数估计有误差，市场的异常波动等原因造成的)，AAI通过引入一系列备选模型的方式来寻求稳健的最优策略，而备选模型与理想模型之间的差异将通过不同概率测度之间的变换来体现.假定理想模型由参考概率测度$\mathbb{P}$刻画，某一备选模型由可替代测度$\mathbb{Q}$刻画，则应满足$\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$，即可替代测度$\mathbb{Q}$和参考概率测度$\mathbb{P}$之间总是等价的，故这一系列备选模型可由概率测度集$\mathcal{Q}=\{\mathbb{Q}|\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}\}$刻画(张弓亮等,2018).对$i\in\{1,2\}$，根据Girsanov定理知，对于每一个可替代测度$\mathbb{Q}_i\in\mathcal{Q}$，将存在一个循序可测的过程$\{\phi_{i,t}\}_{t\in[0,T]}\triangleq\{\phi_{i1,t},\phi_{i2,t}\}_{t\in[0,T]}$，使得$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_i}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t}=\Lambda_{i,t}$，这里

$$\Lambda_{i,t}=\exp\left\{-\int_0^t\phi_{i1,\tau}\mathrm{d}W_{1,\tau}-\frac{1}{2}\int_0^t\phi_{i1,\tau}^2\mathrm{d}\tau-\int_0^t\phi_{i2,\tau}\mathrm{d}W_{2,\tau}-\frac{1}{2}\int_0^t\phi_{i2,\tau}^2\mathrm{d}\tau\right\},\tag{3}$$

且$\{\phi_{i,t}\}_{t\in[0,T]}$满足：(i)　对任意$t\in[0,T]$, $\phi_{i,t}$是$\mathcal{F}_t$-可测的；(ii)　$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\|\phi_{i,t}\|^2\mathrm{d}t\right)\right]<\infty$. 用$\Phi_i$表示所有满足上述条件的$\phi_i$构成的空间.

由上述描述知式(3)定义的$\Lambda_{i,t}$是一个$\mathbb{P}$-鞅. 根据Girsanov定理，在可替代测度$\mathbb{Q}_i\in\mathcal{Q}$下的标准布朗运动$W_{1,t}$和$W_{2,t}$可表示为

$$\mathrm{d}W_{1,t}^{\mathbb{Q}_i}=\mathrm{d}W_{1,t}+\phi_{i1,t}\mathrm{d}t,\qquad \mathrm{d}W_{2,t}^{\mathbb{Q}_i}(t)=\mathrm{d}W_{2,t}(t)+\phi_{i2,t}\mathrm{d}t.$$

相应地，在可替代测度$\mathbb{Q}_i\in\mathcal{Q}$下风险资产的价格过程$S_t$、方差过程$L_t$及投资者$i\in\{1,2\}$的财富过程$X_{i,t}^{\pi_i}$可分别表示为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S_t&=S_t\left[\left(r+\mu L_t-\phi_{i1,t}\sqrt{L_t}\right)\mathrm{d}t+\sqrt{L_t}\,\mathrm{d}W_{1,t}^{\mathbb{Q}_i}\right],\\
\mathrm{d}L_t&=\left[\kappa(\delta-L_t)-\phi_{i2,t}\sigma\sqrt{L_t}\right]\mathrm{d}t+\sigma\sqrt{L_t}\,\mathrm{d}W_{2,t}^{\mathbb{Q}_i},\\
\mathrm{d}X_{i,t}&=\left(r+\mu L_t\pi_{i,t}-\phi_{i1,t}\pi_{i,t}\sqrt{L_t}\right)X_{i,t}\mathrm{d}t+\sqrt{L_t}\,\pi_{i,t}X_{i,t}\mathrm{d}W_{1,t}^{\mathbb{Q}_i}.
\end{aligned}\tag{4}$$

定义 1(可行策略)　令$\mathcal{O}\triangleq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\dagger}$，对任意的$i\in\{1,2\}$和$t\in[0,T]$，$\pi_{i,t}$称为可行策略，如果满足以下条件：

(i)　$\pi_{i,t}$是$\mathcal{F}_t$-循序可测的，且满足$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_i}\left[\int_0^T\|\pi_{i,t}\|^2\mathrm{d}t\right]<\infty$，其中$\mathbb{Q}_i$是一个可替代测度；

(ii)　对任意的初值$(x,l)\in\mathcal{O}$，式(4)存在唯一的强解$X_{i,t}$，满足$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_i^*}\left[\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|X_{i,t}|^2\right]<\infty$.

将投资者i所有可行策略构成的集合记为Π_i, $i=1,2$.

1.3　鲁棒非零和博弈模型构建

对任意$k\neq j\in\{1,2\}$，给定$X_{i,t}=x_i, X_{j,t}=x_j$和$L_t=l$，若投资者i是暧昧中性的，则可将两个投资者之间的非零和博弈问题描述为寻找策略$\pi_i^*\in\Pi_i$最大化下述目标函数

$$J_i^{\pi_i,\pi_j}(t,x_i,x_j,l)\triangleq\mathbb{E}\left[U_i(X_{i,T}^{\pi_i},X_{j,T}^{\pi_j})\,\Big|\,X_{i,t}^{\pi_i}=x_i,X_{j,t}^{\pi_j}=x_j,L_t=l\right],$$

其中

$$U_i(X_{i,T},X_{j,T})\triangleq\frac{1}{1-\gamma_i}\left(X_{i,T}^{\theta_i}\left(X_{i,T}/X_{j,T}\right)^{1-\theta_i}\right)^{1-\gamma_i}=\frac{1}{1-\gamma_i}\left(X_{i,T}X_{j,T}^{\theta_i-1}\right)^{1-\gamma_i}.$$

上式中的$X_{i,T}/X_{j,T}$表示终端时刻相对财富水平，参数$\theta_i\in[0,1]$反映了投资者i对其竞争对手$j\neq i\in\{1,2\}$的相对财富的反应敏感程度，也可衡量市场的竞争度.θ_i越大，表示投资者i越看重相对财富.参数$\gamma_i>1$为常数，表示相对风险厌恶系数.

问题 1　两个投资者之间的经典非零和博弈问题就是寻找纳什均衡策略$(\pi_1^*,\pi_2^*)\in\Pi_1\times\Pi_2$，使得对任意的$(\pi_1,\pi_2)\in\Pi_1\times\Pi_2$，下述不等式成立

$$\begin{cases} J_1^{\pi_1^*,\pi_2^*}(t,x_1,x_2,l) \geqslant J_1^{\pi_1,\pi_2^*}(t,x_1,x_2,l), \\ J_2^{\pi_2^*,\pi_1^*}(t,x_2,x_1,l) \geqslant J_2^{\pi_2,\pi_1^*}(t,x_2,x_1,l). \end{cases}$$

接下来我们将暧昧厌恶的概念融入问题1中，此时，投资者$i \in \{1,2\}$不信任参考概率测度$\mathbb{P}$，而是在$\mathcal{Q}$中选择与之等价的可替换测度$\mathbb{Q}_k$. 换言之，投资者i的目标变为在可替换测度最坏的情形下，最大化终端时刻T相对财富的期望效用. 因此，投资者$i \in \{1,2\}$面临的鲁棒优化问题可表述为

$$\sup_{\pi_i \in \Pi_i} \inf_{\mathbb{Q}_i \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_i}\left[U_i\left(X_{i,T} X_{j,T}^{\theta_i - 1}\right) + P_i\left(\mathbb{P} \,\|\, \mathbb{Q}_i\right)\right],\ i \neq j \in \{1,2\},$$

其中$P_k\left(\mathbb{P} \,\|\, \mathbb{Q}_k\right) \geqslant 0$为惩罚项，用以表示对可替代测度和参考测度之间的距离进行的惩罚.

问题2 两个暧昧厌恶型投资者之间的鲁棒非零和博弈问题是寻找纳什均衡策略$(\pi_1^*, \pi_2^*) \in \Pi_1 \times \Pi_2$，使得对任意的$\pi_1 \in \Pi_1$和$\pi_2 \in \Pi_2$，下述不等式均成立

$$\begin{cases} \inf\limits_{\mathbb{Q}_1 \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}\left[U_1\left(X_{1,T}^{\pi_1}, X_{2,T}^{\pi_2^*}\right) + P_1\left(\mathbb{P} \,\|\, \mathbb{Q}_1\right)\right] \leqslant \inf\limits_{\mathbb{Q}_1 \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}\left[U_1\left(X_{1,T}^{\pi_1^*}, X_{2,T}^{\pi_2^*}\right) + P_1\left(\mathbb{P} \,\|\, \mathbb{Q}_1\right)\right], \\ \inf\limits_{\mathbb{Q}_2 \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_2}\left[U_2\left(X_{2,T}^{\pi_2}, X_{1,T}^{\pi_1^*}\right) + P_2\left(\mathbb{P} \,\|\, \mathbb{Q}_2\right)\right] \leqslant \inf\limits_{\mathbb{Q}_2 \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_2}\left[U_2\left(X_{2,T}^{\pi_2^*}, X_{1,T}^{\pi_1^*}\right) + P_2\left(\mathbb{P} \,\|\, \mathbb{Q}_2\right)\right]. \end{cases}$$

为了求解问题2，参照Maenhout(2004)，考虑下述形式的惩罚函数

$$P_i\left(\mathbb{P} \,\|\, \mathbb{Q}_i\right) \triangleq \int_t^T \left(\frac{\phi_{i1,s}^2}{2\varphi_{i1,s}} + \frac{\phi_{i2,s}^2}{2\varphi_{i2,s}}\right) \mathrm{d}s,$$

并将投资者$i \in \{1,2\}$的值函数定义为

$$V^i(t,x_i,x_j,l) \triangleq \sup_{\pi_i \in \Pi_i} \inf_{\mathbb{Q}_i \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_i}\left[U_i\left(X_{i,T}^{\pi_i}, X_{j,T}^{\pi_j^*}\right) + \int_t^T \left(\frac{\phi_{i1,s}^2}{2\varphi_{i1,s}} + \frac{\phi_{i2,s}^2}{2\varphi_{i2,s}}\right) \mathrm{d}s \,\middle|\, X_{i,t}^{\pi_i} = x_i, X_{j,t}^{\pi_j} = x_j, L_t = l\right].$$

为了求得问题的解析表达，进一步假设$\varphi_{i1,t}$和$\varphi_{i2,t}$具有下述形式

$$\varphi_{i1,t} = \frac{\beta_{i1}}{(1-\gamma_i)V^i(t,x_i,x_j,l)}, \qquad \varphi_{i2,t} = \frac{\beta_{i2}}{(1-\gamma_i)V^i(t,x_i,x_j,l)},$$

其中$\beta_{i1} \geqslant 0$和$\beta_{i2} \geqslant 0$表示投资者i的暧昧厌恶系数，用以描述投资者对暧昧的态度. 当$\beta_{i1} = \beta_{i2} \equiv 0$时，表示投资者是暧昧中性的.

2 Nash均衡

利用动态规划原理分析求解问题2的Nash均衡策略，首先给出暧昧厌恶型投资者Nash均衡策略的解析表达式，然后给出验证定理(verification theorem).

2.1 Nash均衡策略的推导

利用动态规划方法，可得投资者$i \in \{1,2\}$的Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程为

$$\begin{cases} \sup\limits_{\pi_i \in \Pi_i} \inf\limits_{\phi_i \in \Phi_i} \left\{\mathcal{A}^{\pi_i,\pi_j^*,\phi_i,\phi_j^*} W^i(t,x_i,x_j,l) + \frac{\phi_{i1,t}^2}{2\varphi_{i1,t}} + \frac{\phi_{i2,t}^2}{2\varphi_{i2,t}}\right\} = 0, \\ W^i(T,x_i,x_j,l) = U_i(x_i,x_j), \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\pi_i,\pi_j,\phi_i,\phi_j} W^i \triangleq{}& W_t^i + \kappa(\delta - l)W_l^i - \phi_{i,2}\sigma\sqrt{l}\,W_l^i + \frac{1}{2}\sigma^2 l W_{ll}^i + \left(r + \mu l \pi_i - \phi_{i,1}\pi_i\sqrt{l}\right)x_i W_{x_i}^i + \frac{1}{2} l \pi_i^2 x_i^2 W_{x_i x_i}^i \\ &+ \left(r + \mu l \pi_j - \phi_{j,1}\pi_j\sqrt{l}\right)x_j W_{x_j}^i + \frac{1}{2} l \pi_j^2 x_j^2 W_{x_j x_j}^i + l\pi_i\pi_j x_i x_j W_{x_i x_j}^i + \rho\sigma\pi_i l x_i W_{x_i l}^i + \rho\sigma\pi_j l x_j W_{x_j l}^i. \end{aligned}$$

下述定理1给出了CRRA效用下问题2的Nash均衡策略.

定理1 对两人鲁棒非零和博弈问题2，若$B_1(t)$和$B_2(t)$是下述两个耦合常微分方程的解

$$\begin{aligned} \dot{B}_1(t) &= \xi_{11} + \xi_{12}B_1(t) + \xi_{13}B_1^2(t) + \xi_{14}B_2(t) + \xi_{15}B_2^2(t) + \xi_{16}B_1(t)B_2(t), \\ \dot{B}_2(t) &= \xi_{21} + \xi_{22}B_2(t) + \xi_{23}B_2^2(t) + \xi_{24}B_1(t) + \xi_{25}B_1^2(t) + \xi_{26}B_2(t)B_1(t), \end{aligned}$$

终端条件为$B_1(T) = B_2(T) = 0$，其中$\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{i6}, i = 1,2$的形式如式(16)~(21)所示，则式(5)所示的HJB方程存在下述形式的解

$$V^i(t,x_i,x_j,l)=\frac{1}{1-\gamma_i}\left(x_i x_j^{\theta_i-1}\right)^{1-\gamma_i}\mathrm{e}^{A_i(t)-B_i(t)l},$$

其中

$$A_i(t)=r\theta_i(1-\gamma_i)(T-t)-\kappa\sigma\int_t^T B_i(s)\mathrm{d}s.$$

此时，两个投资者的均衡投资策略π_1^*和π_2^*可表示为

$$\begin{cases}\pi_1^*(t)=\dfrac{\mu\left(1+\nu_1\right)-\rho\sigma\left(B_1(t)+\nu_1 B_2(t)\right)}{\left(1-\nu_1\nu_2\right)\left(\gamma_1+\beta_{11}\right)},\\ \pi_2^*(t)=\dfrac{\mu\left(1+\nu_2\right)-\rho\sigma\left(B_2(t)+\nu_2 B_1(t)\right)}{\left(1-\nu_1\nu_2\right)\left(\gamma_2+\beta_{21}\right)},\end{cases}$$

其中$\nu_1=\left(1-\gamma_1\right)\left(1-\theta_1\right)/\left(\gamma_2+\beta_{21}\right)$，$\nu_2=\left(1-\gamma_2\right)\left(1-\theta_2\right)/\left(\gamma_1+\beta_{i1}\right)$，且满足$1+\nu_1>0$，$1+\nu_2>0$，$1-\nu_1\nu_2>0$.

证明　为了求解式(5)，假设V^i具有下述形式

$$V^i(t,x_i,x_j,l)=\frac{1}{1-\gamma_i}\left(x_i x_j^{\theta_i-1}\right)^{1-\gamma_i}\exp\left[A_i(t)-B_i(t)l\right],\tag{6}$$

其中$A_i:[0,T]\to\mathbb{R}$, $B_i:[0,T]\to\mathbb{R}$待定，满足终端条件$A_i(T)=0$，$B_i(T)=0$.

由式(6)得到V^i的各阶偏导数为

$$\begin{cases}V_t^i=\left(\dot{A}_i-\dot{B}_i l\right)V^i,\ V_l^i=-B_i V^i,\ V_{ll}^i=B_i^2V^i,\\ V_{x_i}^i=\dfrac{1-\gamma_i}{x_i}V^i,\ V_{x_j}^i=\dfrac{\left(\theta_i-1\right)\left(1-\gamma_i\right)}{x_j}V^i,\\ V_{x_ix_i}^i=-\dfrac{\gamma_i\left(1-\gamma_i\right)}{x_i^2}V^i,\ V_{x_jx_j}^i=\dfrac{\left(\theta_i-1\right)\left(1-\gamma_i\right)\left[\left(\theta_i-1\right)\left(1-\gamma_i\right)-1\right]}{x_j^2}V^i,\\ V_{x_ix_j}^i=\dfrac{\left(\theta_i-1\right)\left(1-\gamma_i\right)^2}{x_ix_j}V^i,\ V_{x_il}^i=-\dfrac{1-\gamma_i}{x_i}B_iV^i,\ V_{x_jl}^i=-\dfrac{\left(\theta_i-1\right)\left(1-\gamma_i\right)}{x_j}B_iV^i.\end{cases}\tag{7}$$

将式(7)代入式(5)，得到

$$\begin{aligned}\sup_{\pi_i\in\Pi_i}\inf_{\phi_i\in\Phi_i}\Big\{&\dot{A}_i-\dot{B}_il-\kappa(\delta-l)B_i+\phi_{i,2}\sigma\sqrt{l}\,B_i+\frac{1}{2}\sigma^2lB_i^2+r\theta_i\left(1-\gamma_i\right)\\&+\pi_i\left(\mu l-\phi_{i1}\sqrt{l}\right)\left(1-\gamma_i\right)-\frac{1}{2}\pi_i^2l\gamma_i\left(1-\gamma_i\right)+\pi_j^*\left(\mu l-\phi_{j1}^*\sqrt{l}\right)\left(\theta_i-1\right)\left(1-\gamma_i\right)\\&+\frac{1}{2}\pi_j^{*2}l\left(\theta_i-1\right)\left(1-\gamma_i\right)\left[\left(\theta_i-1\right)\left(1-\gamma_i\right)-1\right]+\pi_i\pi_j^*l\left(\theta_i-1\right)\left(1-\gamma_i\right)^2\\&-\rho\sigma\pi_il\left(1-\gamma_i\right)B_i-\rho\sigma\pi_j^*l\left(\theta_i-1\right)\left(1-\gamma_i\right)B_i+\frac{\phi_{i1}^2\left(1-\gamma_i\right)}{2\beta_{i1}}+\frac{\phi_{i2}^2\left(1-\gamma_i\right)}{2\beta_{i2}}\Big\}=0.\end{aligned}\tag{8}$$

式(8)分别对ϕ_{i1}和ϕ_{i2}求一阶条件，得到

$$\begin{cases}\phi_{i1}^*=\beta_{i1}\pi_i\sqrt{l},\\ \phi_{i2}^*=-\dfrac{\beta_{i2}}{1-\gamma_i}\sigma\sqrt{l}\,B_i.\end{cases}\tag{9}$$

将式(9)代入式(8)得

$$\begin{aligned}\sup_{\pi_i\in\Pi_i}\Big\{&\dot{A}_i-\dot{B}_il-\kappa(\delta-l)B_i+\frac{\left(1-\gamma_i-\beta_{i2}\right)}{2\left(1-\gamma_i\right)}\sigma^2lB_i^2+r\theta_i\left(1-\gamma_i\right)+\pi_i\left(\mu-\rho\sigma B_i\right)l\left(1-\gamma_i\right)\\&-\frac{1}{2}\pi_i^2l\left(\gamma_i+\beta_{i1}\right)\left(1-\gamma_i\right)+\pi_i\pi_j^*l\left(\theta_i-1\right)\left(1-\gamma_i\right)^2+\pi_j^*\left(\mu-\rho\sigma B_i\right)l\left(\theta_i-1\right)\left(1-\gamma_i\right)\\&+\frac{1}{2}\pi_j^{*2}l\left(\theta_i-1\right)\left(1-\gamma_i\right)\left[\left(\theta_i-1\right)\left(1-\gamma_i\right)-1-2\beta_{j1}\right]\Big\}=0.\end{aligned}\tag{10}$$

式(10)对π_i求一阶条件，得到

$$\pi_i^* = \frac{\mu - \rho\sigma B_i + \pi_j^*(\theta_i - 1)(1 - \gamma_i)}{\gamma_i + \beta_{i1}}. \tag{11}$$

将式(11)中π_i^*的代入式(10)，化简得

$$\begin{aligned}&\dot{A}_i - \dot{B}_i l - \kappa(\delta - l)B_i + \frac{(1 - \gamma_i - \beta_{i2})}{2(1 - \gamma_i)}\sigma^2 l B_i^2 + r\theta_i(1 - \gamma_i)\\ &+ \frac{l(1 - \gamma_i)(\mu - \rho\sigma B_i)^2}{2(\gamma_i + \beta_{i1})} + \pi_j^*(\mu - \rho\sigma B_i)l\frac{(\theta_i - 1)(1 - \gamma_i)(\beta_{i1} + 1)}{(\gamma_i + \beta_{i1})}\\ &+ \frac{1}{2}\pi_j^{*2}l(\theta_i - 1)(1 - \gamma_i)\left[(\theta_i - 1)(1 - \gamma_i) - 1 - 2\beta_{j1} + \frac{(\theta_i - 1)(1 - \gamma_i)^2}{(\gamma_i + \beta_{i1})}\right] = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

式(12)可拆分为

$$\dot{A}_i - \kappa\delta B_i + r\theta_i(1 - \gamma_i) = 0$$

和

$$\begin{aligned}&-\dot{B}_i + \kappa B_i + \frac{(1 - \gamma_i - \beta_{i2})}{2(1 - \gamma_i)}\sigma^2 B_i^2 + \frac{(1 - \gamma_i)(\mu - \rho\sigma B_i)^2}{2(\gamma_i + \beta_{i1})} + \pi_j^*(\mu - \rho\sigma B_i)\frac{(\theta_i - 1)(1 - \gamma_i)(\beta_{i1} + 1)}{(\gamma_i + \beta_{i1})}\\ &+ \frac{1}{2}\pi_j^{*2}(\theta_i - 1)(1 - \gamma_i)\left[(\theta_i - 1)(1 - \gamma_i) - 1 - 2\beta_{j1} + \frac{(\theta_i - 1)(1 - \gamma_i)^2}{(\gamma_i + \beta_{i1})}\right] = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

由式(11)得到

$$\pi_i^* = \frac{\mu(1 + \nu_i) - \rho\sigma(B_i + \nu_i B_j)}{(1 - \nu_i\nu_j)(\gamma_i + \beta_{i1})}, \tag{14}$$

其中$\nu_i \triangleq \frac{(\theta_i - 1)(1 - \gamma_i)}{\gamma_j + \beta_{j1}}$. 将式(14)中$\pi_i^*$修改为$\pi_j^*$代入式(13)，化简得到

$$\begin{aligned}&-\dot{B}_i + \kappa B_i + \frac{(1 - \gamma_i - \beta_{i2})}{2(1 - \gamma_i)}\sigma^2 B_i^2 + \frac{(1 - \gamma_i)(\mu - \rho\sigma B_i)^2}{2(\gamma_i + \beta_{i1})}\\ &+ \frac{\left[\mu(1 + \nu_j) - \rho\sigma(B_j + \nu_j B_i)\right]}{(1 - \nu_i\nu_j)(\gamma_i + \beta_{i1})}\nu_i(\mu - \rho\sigma B_i)(\beta_{i1} + 1)\\ &+ \frac{1}{2}\frac{\left[\mu(1 + \nu_j) - \rho\sigma(B_j + \nu_j B_i)\right]^2}{(1 - \nu_i\nu_j)^2}\nu_i\left[\frac{\nu_i(1 + \beta_{i1})}{(\gamma_i + \beta_{i1})} - \frac{1 + 2\beta_{j1}}{(\gamma_j + \beta_{j1})}\right] = 0.\end{aligned} \tag{15}$$

将式(15)简记为

$$\dot{B}_i = \xi_{i1} + \xi_{i2}B_i + \xi_{i3}B_i^2 + \xi_{i4}B_j + \xi_{i5}B_j^2 + \xi_{i6}B_iB_j,$$

其中

$$\xi_{i1} = \frac{(1 - \gamma_i)\mu^2}{2(\gamma_i + \beta_{i1})} + \frac{\mu^2\nu_i(1 + \nu_j)(\beta_{i1} + 1)}{(1 - \nu_i\nu_j)(\gamma_i + \beta_{i1})} + \frac{\mu^2\nu_i(1 + \nu_j)^2}{2(1 - \nu_i\nu_j)^2}\left[\frac{\nu_i(1 + \beta_{i1})}{(\gamma_i + \beta_{i1})} - \frac{1 + 2\beta_{j1}}{(\gamma_j + \beta_{j1})}\right], \tag{16}$$

$$\xi_{i2} = \kappa - \frac{\rho\sigma\mu(1 - \gamma_i)}{(\gamma_i + \beta_{i1})} - \frac{(1 + 2\nu_j)\rho\sigma\mu\nu_i(1 + \beta_{i1})}{(1 - \nu_i\nu_j)(\gamma_i + \beta_{i1})} - \frac{\rho\sigma\mu\nu_i\nu_j(1 + \nu_j)}{(1 - \nu_i\nu_j)^2}\left[\frac{\nu_i(1 + \beta_{i1})}{(\gamma_i + \beta_{i1})} - \frac{1 + 2\beta_{j1}}{(\gamma_j + \beta_{j1})}\right], \tag{17}$$

$$\xi_{i3} = \frac{\sigma^2(1 - \gamma_i - \beta_{i2})}{2(1 - \gamma_i)} + \frac{\rho^2\sigma^2(1 - \gamma_i)}{2(\gamma_i + \beta_{i1})} + \frac{\rho^2\sigma^2\nu_i\nu_j(1 + \beta_{i1})}{(1 - \nu_i\nu_j)(\gamma_i + \beta_{i1})} + \frac{\rho^2\sigma^2\nu_i\nu_j^2}{2(1 - \nu_i\nu_j)^2}\left[\frac{\nu_i(1 + \beta_{i1})}{(\gamma_i + \beta_{i1})} - \frac{1 + 2\beta_{j1}}{(\gamma_j + \beta_{j1})}\right], \tag{18}$$

$$\xi_{i4} = -\frac{\rho\sigma\mu\nu_i(1 + \beta_{i1})}{(1 - \nu_i\nu_j)(\gamma_i + \beta_{i1})} - \frac{\rho\sigma\mu\nu_i(1 + \nu_j)}{(1 - \nu_i\nu_j)^2}\left[\frac{\nu_i(1 + \beta_{i1})}{(\gamma_i + \beta_{i1})} - \frac{1 + 2\beta_{j1}}{(\gamma_j + \beta_{j1})}\right], \tag{19}$$

$$\xi_{i5}=\frac{\rho^2\sigma^2\nu_i}{2\left(1-\nu_i\nu_j\right)^2}\left[\frac{\nu_i\left(1+\beta_{i1}\right)}{\left(\gamma_i+\beta_{i1}\right)}-\frac{1+2\beta_{j1}}{\left(\gamma_j+\beta_{j1}\right)}\right], \tag{20}$$

$$\xi_{i6}=\frac{\rho^2\sigma^2\nu_i\left(1+\beta_{i1}\right)}{\left(1-\nu_i\nu_j\right)\left(\gamma_i+\beta_{i1}\right)}+\frac{\rho^2\sigma^2\nu_i\nu_j}{\left(1-\nu_i\nu_j\right)^2}\left[\frac{\nu_i\left(1+\beta_{i1}\right)}{\left(\gamma_i+\beta_{i1}\right)}-\frac{1+2\beta_{j1}}{\left(\gamma_j+\beta_{j1}\right)}\right]. \tag{21}$$

在定理1中，当$\beta_{i1}=\beta_{i2}\equiv 0$，$i=1,2$时，投资者$i$成了暧昧中性型，此时的鲁棒非零和博弈问题2退化成了两个暧昧中性型投资者之间的经典非零和博弈问题1，相关结果由如下推论给出.

推论1　对两人经典非零和博弈问题1，令$\nu_1=\left(1-\gamma_1\right)\left(1-\theta_1\right)/\gamma_2$，$\nu_2=\left(1-\gamma_2\right)\left(1-\theta_2\right)/\gamma_1$，若$B_1(t)$和$B_2(t)$是下述两个耦合常微分方程的解

$$\dot{B}_1(t)=\bar{\xi}_{11}+\bar{\xi}_{12}B_1(t)+\bar{\xi}_{13}B_1^2(t)+\bar{\xi}_{14}B_2(t)+\bar{\xi}_{15}B_2^2(t)+\bar{\xi}_{16}B_1(t)B_2(t),$$

$$\dot{B}_2(t)=\bar{\xi}_{21}+\bar{\xi}_{22}B_2(t)+\bar{\xi}_{23}B_2^2(t)+\bar{\xi}_{24}B_1(t)+\bar{\xi}_{25}B_1^2(t)+\bar{\xi}_{26}B_2(t)B_1(t),$$

终端条件为$B_1(T)=B_2(T)=0$，其中$\bar{\xi}_{i1},\bar{\xi}_{i2},\cdots,\bar{\xi}_{i6}$，$i=1,2$的形式如下式所示，

$$\bar{\xi}_{i1}=\frac{\left(1-\gamma_i\right)\mu^2}{2\gamma_i}+\frac{\mu^2\nu_i\left(1+\nu_j\right)}{\gamma_i\left(1-\nu_i\nu_j\right)}+\frac{\mu^2\nu_i\left(1+\nu_j\right)^2}{2\left(1-\nu_i\nu_j\right)^2}\left(\frac{\nu_i}{\gamma_i}-\frac{1}{\gamma_j}\right),$$

$$\bar{\xi}_{i2}=\kappa-\frac{\rho\sigma\mu\left(1-\gamma_i\right)}{\gamma_i}-\frac{\left(1+2\nu_j\right)\rho\sigma\mu\nu_i}{\gamma_i\left(1-\nu_i\nu_j\right)}-\frac{\rho\sigma\mu\nu_i\nu_j\left(1+\nu_j\right)}{\left(1-\nu_i\nu_j\right)^2}\left(\frac{\nu_i}{\gamma_i}-\frac{1}{\gamma_j}\right),$$

$$\bar{\xi}_{i3}=\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\rho^2\sigma^2\left(1-\gamma_i\right)}{2\gamma_i}+\frac{\rho^2\sigma^2\nu_i\nu_j}{\gamma_i\left(1-\nu_i\nu_j\right)}+\frac{\rho^2\sigma^2\nu_i\nu_j^2}{2\left(1-\nu_i\nu_j\right)^2}\left(\frac{\nu_i}{\gamma_i}-\frac{1}{\gamma_j}\right),$$

$$\bar{\xi}_{i4}=-\frac{\rho\sigma\mu\nu_i}{\gamma_i\left(1-\nu_i\nu_j\right)}-\frac{\rho\sigma\mu\nu_i\left(1+\nu_j\right)}{\left(1-\nu_i\nu_j\right)^2}\left(\frac{\nu_i}{\gamma_i}-\frac{1}{\gamma_j}\right),$$

$$\bar{\xi}_{i5}=\frac{1}{2}\frac{\nu_i}{\left(1-\nu_i\nu_j\right)^2}\rho^2\sigma^2\left(\frac{\nu_i}{\gamma_i}-\frac{1}{\gamma_j}\right),$$

$$\bar{\xi}_{i6}=\frac{\rho^2\sigma^2\nu_i}{\left(1-\nu_i\nu_j\right)^2}\left[\frac{1}{\gamma_i}-\frac{\nu_j}{\gamma_j}\right],$$

则投资者i在均衡状态下的最优值函数为

$$V^i(t,x_i,x_j,l)=\frac{1}{1-\gamma_i}\left(x_i x_j^{\theta_i-1}\right)^{1-\gamma_i}\mathrm{e}^{A_i(t)-B_i(t)l},$$

其中

$$A_i(t)=r\theta_i(1-\gamma_i)(T-t)-\kappa\sigma\int_t^T B_i(s)\mathrm{d}s.$$

此外，两个投资者的均衡投资策略π_1^*和π_2^*可表示为

$$\begin{cases}\pi_1^*(t)=\dfrac{\mu\left(1+\nu_1\right)-\rho\sigma\left(B_1(t)+\nu_1B_2(t)\right)}{(1-\nu_1\nu_2)\gamma_1},\\[2ex] \pi_2^*(t)=\dfrac{\mu\left(1+\nu_2\right)-\rho\sigma\left(B_2(t)+\nu_2B_1(t)\right)}{(1-\nu_1\nu_2)\gamma_2},\end{cases}$$

其中$1+\nu_1>0$，$1+\nu_2>0$，$1-\nu_1\nu_2>0$.

2.2　验证定理

为了验证HJB方程(5)的解$V^i(t,x_i,x_j,l)$为鲁棒非零和博弈问题2的值函数，在假设投资者都采用CRRA效用函数下，我们给出相应的验证定理.

定理2(验证定理)　对$i\neq j\in\{1,2\}$，如果存在实值函数$\bar{V}^i(t,x_i,x_j,l)\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}\times\mathcal{O})$和马尔科夫控制策略$(\pi_i^*,\phi_i^*)\in\Pi_i\times\Phi_i$，使得

（i） 对任意$\phi_i \in \Phi_i$，$\mathcal{A}_i^{\pi_i^*,\pi_j^*,\phi_i,\phi_j^*}\bar{V}^i(t,x_i,x_j,l) + \dfrac{\phi_{i1}^2}{2\varphi_{i1}} + \dfrac{\phi_{i2}^2}{2\varphi_{i2}} \geqslant 0$；

（ii）对任意的$\pi_k \in \Pi_k$，$\mathcal{L}_i^{\pi_i,\pi_j^*,\phi_i^*,\phi_j^*}\bar{V}^i(t,x_i,x_j,l) + \dfrac{\phi_{i1}^{*2}}{2\varphi_{i1}} + \dfrac{\phi_{i2}^{*2}}{2\varphi_{i2}} \leqslant 0$；

（iii）$\mathcal{L}_i^{\pi_i^*,\pi_j^*,\phi_i^*,\phi_j^*}\bar{V}^i(t,x_i,x_j,l) + \dfrac{\phi_{i1}^{*2}}{2\varphi_{i1}} + \dfrac{\phi_{i2}^{*2}}{2\varphi_{i2}} = 0$；

（iv） 对所有的$(\pi_i,\phi_i) \in \Pi_i \times \Phi_i$，$\lim\limits_{t\to T}\bar{V}^i\left(t, X_i^{\pi_i}(t), X_j^{\pi_j^*}(t), L(t)\right) = U_i\left(X_i^{\pi_i}(T)\left(X_j^{\pi_j^*}(T)\right)^{-\theta_i}\right)$；

（v） $\left\{\bar{V}^i\left(\tau,x_i,x_j,l\right)\right\}_{\tau\in\mathcal{T}}$和$\left\{\dfrac{\left(\phi_{i1}^*(\tau)\right)^2}{2\varphi_{i1}(\tau)} + \dfrac{\left(\phi_{i2}^*(\tau)\right)^2}{2\varphi_{i2}(\tau)}\right\}_{\tau\in\mathcal{T}}$都是一致可积的，其中$\mathcal{T}$是所有停时$\tau\in[0,T]$构成的集合，

那么π_i^*是最优策略，$\bar{V}^i(t,x_i,x_j,l) = V^i(t,x_i,x_j,l)$是相应的值函数.

定理2的证明类似于Mataramvura et al.(2008)和Zeng et al.(2018)，囿于篇幅所限，这里不再给出详细证明.

3 数值仿真算例

参照Zeng et al.(2018)及Kraft et al.(2020)及对模型关键参数的设定，算例中所涉及的参数取值如下表1和2所示：

表1 金融市场的基本参数

Table 1 Basic parameters f the financial market

参数	取值
r	0. 050 0
κ	0. 337 6
σ	0. 210 9
t	0
μ	1. 986 0
δ	0. 032 6
ρ	−0. 339 9
T	20

运用Matlab软件得到相关参数变动对均衡投资策略的仿真结果如下图1至图5所示：

图1展示了参数κ对均衡投资策略π_i^*的影响.从图中可以发现π_i^*是κ的减函数.这可以解释为κ表示风险资产价格波动L_t的平均回复速率，当相关系数$\rho < 0$时，风险资产价格波动L_t与价格S_t反向运动，κ越大，L_t波动的抵消效应就越弱，这意味着风险资产的价格波动增加，投资风险加大，故投资者倾向于减少风险资产的投资比例.

表2 投资者的基本参数

Table 2 Basic parameters of the investors

投资者1		投资者2	
参数	取值	参数	取值
γ_1	4	γ_2	5
θ_1	0. 6	θ_2	0. 8
β_{11}	3	β_{21}	5
β_{12}	1	β_{22}	3

图2给出了参数σ对均衡投资策略π_i^*的影响.从图中可以看出π_i^*是σ的增函数，这是因为σ表示风险资产价格波动L_t的波动率，当相关系数$\rho < 0$时，风险资产价格波动L_t与价格S_t反向运动，σ越大，L_t波动的补偿效应就越强，结果使得风险资产的预期收益率增加，故投资者倾向于增加风险资产的投资比例.

图3描述了参数γ_i对均衡投资策略π_i^*的影响.从图中可以看出，π_i^*是γ_i的减函数，这可以解释为γ_i越大，意味着投资者越厌恶风险，这时他为了规避风险会减少在风险资产上的投资.

图4揭示了参数κ_k对均衡投资策略π_k^*的影响.随着竞争参数κ_k的增加，投资者的均衡投资策略π_k^*也增加，即投资者为了应对日益激烈的市场竞争，往往会增加风险资产的投资比例以获取更高的回报，从而在博弈中获胜，在市场中站得领先，有利于他在将来更好地开展业务.

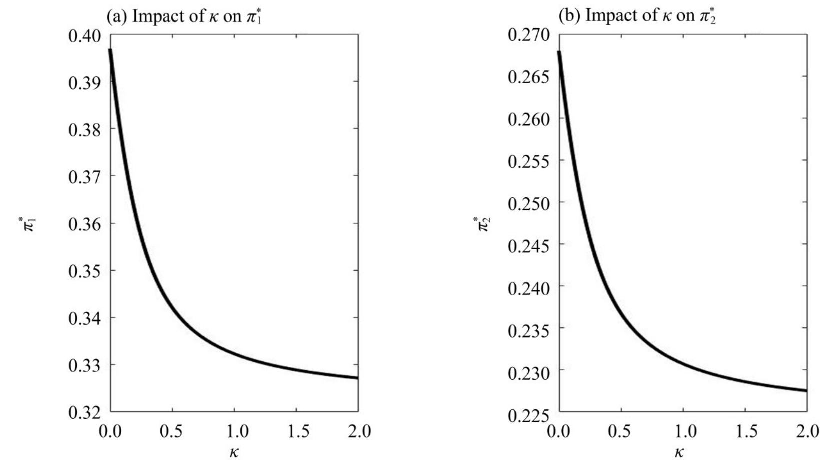

图 1　$\boldsymbol{\kappa}$ 对均衡投资策略 $\boldsymbol{\pi}_i^*(\boldsymbol{i}=1,2)$ 的影响

Fig. 1　Impact of $\boldsymbol{\kappa}$ on equilibrium investment strategies $\boldsymbol{\pi}_i^*$ ($\boldsymbol{i}=1,2$)

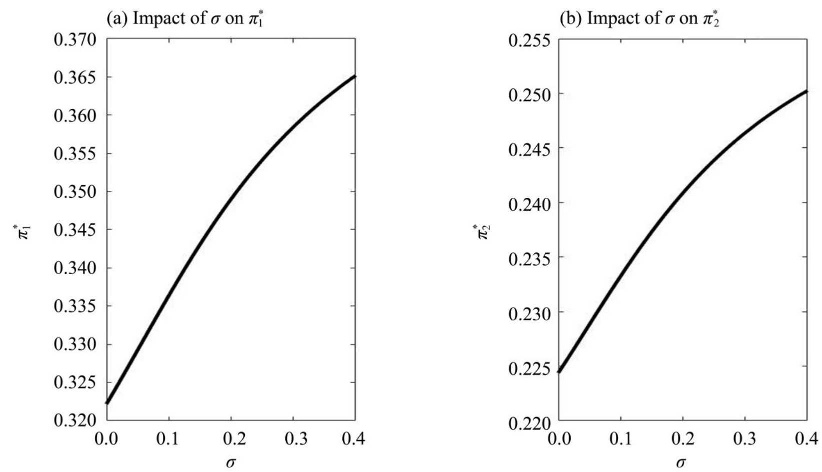

图 2　$\boldsymbol{\sigma}$ 对均衡投资策略 $\boldsymbol{\pi}_i^*(\boldsymbol{i}=1,2)$ 的影响

Fig. 2　Impact of $\boldsymbol{\sigma}$ on equilibrium investment strategies $\boldsymbol{\pi}_i^*$ ($\boldsymbol{i}=1,2$)

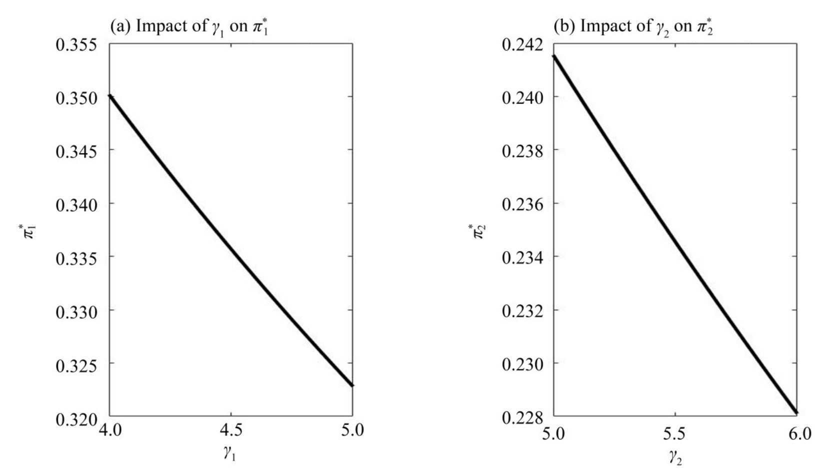

图 3　$\boldsymbol{\gamma}_i$ 对均衡投资策略 $\boldsymbol{\pi}_i^*(\boldsymbol{i}=1,2)$ 的影响

Fig. 3　Impact of $\boldsymbol{\gamma}_i$ on equilibrium investment strategies $\boldsymbol{\pi}_i^*$ ($\boldsymbol{i}=1,2$)

图 5 刻画了暧昧厌恶系数 β_{ij} 对均衡投资策略 $\boldsymbol{\pi}_i^*$ 的影响. 可以发现随着 β_{ij} 的增加，投资者的均衡投资策略 $\boldsymbol{\pi}_i^*$ 减小，这可以解释为 β_{ij} 描述了投资者对模型暧昧性的厌恶程度，β_{ij} 越大意味着投资者对模型的暧昧性越厌恶，因而减少了风险资产上的投资比例.

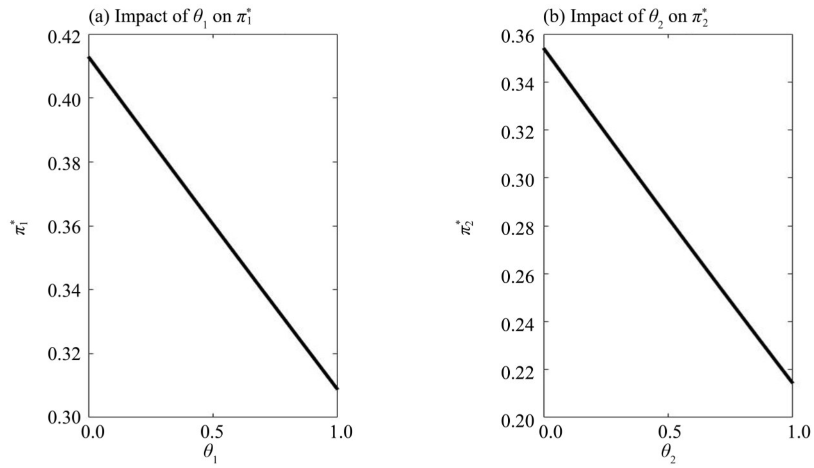

图 4　$\boldsymbol{\theta}_i$ 对均衡投资策略 $\boldsymbol{\pi}_i^*(\boldsymbol{i}=1,2)$ 的影响

Fig. 4　Impact of $\boldsymbol{\theta}_i$ on equilibrium investment strategies $\boldsymbol{\pi}_i^*$（$\boldsymbol{i}=1$，2）

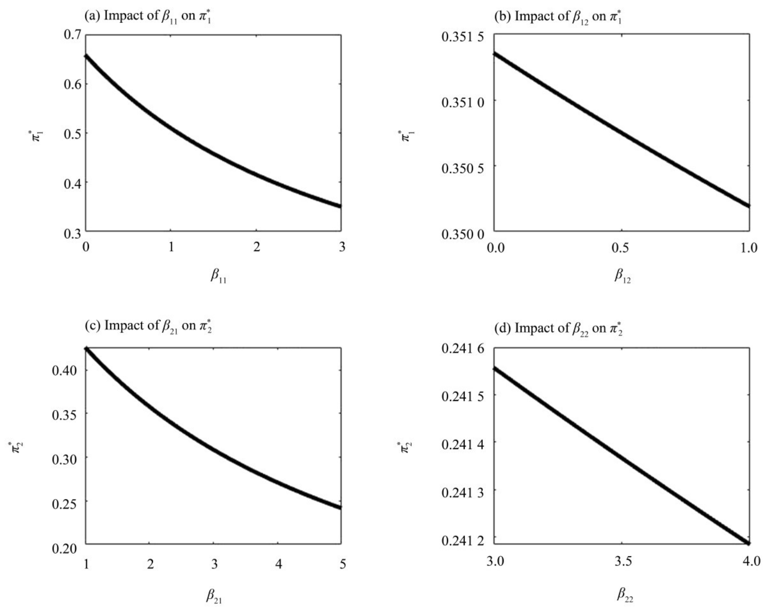

图 5　$\boldsymbol{\beta}_{ij}$ 对均衡投资策略 $\boldsymbol{\pi}_i^*(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}=1,2)$ 的影响

Fig. 5　Impact of $\boldsymbol{\beta}_{ij}$ on equilibrium investment strategies $\boldsymbol{\pi}_i^*$（$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}=1,2$）

4　结　语

金融市场复杂多变，为了较为准确地刻画风险资产的价格波动特性，选择Heston模型描述风险资产的价格动态，投资者可以在无风险资产和风险资产上自由地进行资产配置. 考虑到金融市场中投资者之间经济行为的随机博弈，以两个投资者为例，借助相对业绩刻画投资者之间的博弈关系，同时考虑模型的不确定性，在相对业绩关注下构建了两人鲁棒非零和投资组合博弈模型，使用动态规划方法给出了CRRA效用函数下Nash均衡策略的解析表达. 最后通过数值仿真算例分析了模型参数变动对均衡策略的影响，仿真结果揭示：与不考虑竞争情形下的传统投资策略相比，风险资产的价格波动的平均回复速率参数 κ 与波动参数 σ 及投资者的风险厌恶系数对均衡投资策略产生的影响与传统投资策略类似，当风险资产价格过程与波动过程的相关系数 $\rho<0$ 时，平均回复速率参数 κ 越小，或波动参数 σ 越大，投资者都会增加对风险资产的投资；当风险厌恶系数 γ_i 越大时，投资者会减少对风险资产的投资. 此外，当市场竞争参数 θ_i 越大时，投资者会增加对风险资产的投资，这在一定程度上也说明金融市场竞争环境的加剧会导致投资者之间的竞争加剧，即各自都会增加对风险资产的投资，进而引起金融市场的投资繁荣现象，也增加了

金融市场的系统风险. 本文的研究不仅拓展了现有的连续时间投资组合优化理论，而且可为考虑策略互动情形下的投资决策提供参考.

参考文献：

宾宁，朱怀念，2021. 考虑模糊厌恶和时滞效应的随机微分投资与再保险策略[J]. 系统工程理论与实践，41(6)：1439-1453.

费为银，李允贺，夏登峰，2015. 通胀下带激励的对冲基金最优投资[J]. 系统工程理论与实践，35(11)：2740-2748.

莫仕茵，朱怀念，2023. 最优投资与风险控制策略的多人非零和博弈及平均场博弈[J]. 广东工业大学学报，40(5)：123-132.

张弓亮，朱怀念，李洁茗，2019. 模型不确定性下的非零和随机微分投资与再保险博弈[J]. 系统工程，37(4)：129-138.

周忠宝，任甜甜，肖和录，等，2019a. 资产收益序列相依下的多阶段投资博弈模型[J]. 管理科学学报，22(7)：66-88.

周忠宝，任甜甜，肖和录，等，2019b. 基于相对财富效用的多阶段投资组合博弈模型[J]. 中国管理科学，27(1)：34-43.

朱怀念，宾宁，张成科，2021. 一类双层非零和随机微分投资与再保险博弈模型[J]. 系统科学与数学，41(11)：1-19.

BASAK S，MAKAROV D，2014. Strategic asset allocation in money management[J]. J Finance，69(1)：179-217.

BENSOUSSAN A，SIU C C，YAM S C P，et al，2014. A class of non-zero-sum stochastic differential investment and reinsurance games[J]. Automatica，50(8)：2025-2037.

CARPENTER J N，2000. Does option compensation increase managerial risk appetite?[J]. J Finance，55(5)：2311-2331.

CHEN S，YANG H，ZENG Y，2018. Stochastic differential games between two insurers with generalized mean-variance premium principle[J]. ASTIN Bull，48(1)：413-434.

DeMARZO P M，KANIEL R，KREMER I，2008. Relative wealth concerns and financial bubbles[J]. Rev Financ Stud，21(1)：19-50.

DENG C，ZENG X，ZHU H，2018. Non-zero-sum stochastic differential reinsurance and investment games with default risk[J]. Eur J Oper Res，264(3)：1144-1158.

dos REIS G，PLATONOV V，2022. Forward utility and market adjustments in relative investment-consumption games of many players[J]. SIAM J Finan Math，13(3)：844-876.

ESPINOSA G E，TOUZI N，2015. Optimal investment under relative performance concerns[J]. Math Finance，25(2)：221-257.

FU G，2023. Mean field portfolio games with consumption[J]. Math Financ Econ，17(1)：79-99.

GUAN G，LIANG Z，2016. A stochastic Nash equilibrium portfolio game between two DC pension funds[J]. Insur Math Econ，70：237-244.

KRAFT H，MEYER-WEHMANN A，SEIFRIED F T，2020. Dynamic asset allocation with relative wealth concerns in incomplete markets[J]. J Econ Dyn Contr，113：103857.

LACKER D，SORET A，2020. Many-player games of optimal consumption and investment under relative performance criteria[J]. Math Financ Econ，14(2)：263-281.

LACKER D，ZARIPHOPOULOU T，2019. Mean field and n-agent games for optimal investment under relative performance criteria[J]. Math Finance，29(4)：1003-1038.

LUO S，WANG M，ZHU W，2021. Stochastic differential reinsurance games in diffusion approximation models[J]. J Comput Appl Math，386：113252.

MAENHOUT P J，2004. Robust portfolio rules and asset pricing[J]. Rev Financ Stud，17(4)：951-983.

MATARAMVURA S，ØKSENDAL B，2008. Risk minimizing portfolios and HJBI equations for stochastic differential games[J]. Stochastics，80(4)：317-337.

SIU C C，YAM S C P，YANG H，et al，2017. A class of nonzero-sum investment and reinsurance games subject to systematic risks[J]. Scand Actuar J，2017(8)：670-707.

WANG N，ZHANG N，JIN Z，et al，2019. Robust non-zero-sum investment and reinsurance game with default risk[J]. Insur Math Econ，84：115-132.

YAN M，PENG F，ZHANG S，2017. A reinsurance and investment game between two insurance companies with the different opinions about some extra information[J]. Insur Math Econ，75：58-70.

ZENG Y，LI D，CHEN Z，et al，2018. Ambiguity aversion and optimal derivative-based pension investment with stochastic income and volatility[J]. J Econ Dyn Contr，88：70-103.

（责任编辑　冯兆永）